UNIVERZITET U TUZLI
RGGF

Pitanja za pripremu prijemnog ispita iz Fizike na RGGF

1. Koja od slijedećih dužina je najveća ?

a) 10^0m b) 10^2 cm c) 10^4 mm d) 10^5 mm e) 10^6 mm

2. Zaokruži osnovnu mjernu jedinicu za brzinu ?

a) m s b) kg m c) m^2/s d) m/s^2 e) m/s

3. Koja od navedenih veličina nije vektorska ?

a) masa b) rad c) temperatura d) nijedna od navedenih

4. Koja od navedenih veličina je skalarna ?

a) brzina b) ubrzanje c) vrijeme d) sila

5. Jedan njutn se može izraziti kao :

a) 1 kg m/s^2 b) 9.81 kg m/s^2 c) kg m^2 d) kg m/s

6. Tijelo se kreće ravnomjerno pravolinijski i za pola minute pređe put od 30 m. Odrediti brzinu tijela.

a) 1 m/s^2 b) 1 m/s c) 3 kg m^2 d) 3 m/s

7. Automobil se kreće jednakoubrzano sa ubrzanjem 2 m/s^2. Odredi put koji automobil pređe za 4 s.

a) 16 m/s^2 b) 16 m c) 8 m d) 32 m

8. Lopta je bačena vertikalno uvis sa površine Zemlje. Koja od veličina je nula kada lopta dosegne maksimalnu visinu ?

(1) ubrzanje (2) brzina (3) vrijeme

a) 1 i 3 b) 1, 2 i 3 c) 2 d) 1 i 2

9. Tijelo slobodno pada sa visine 45 m. Odredi vrijeme za koje će tijelo dospjeti na površinu Zemlje. ($g = 10\ m/s^2$)

a) 3 s b) 4 s c) 7 s d) 2 s

10. Loptica se kreće konstantnom brzinom 3 m/s po kružnici poluprečnika 0,5 m. Odredi ugaonu brzinu loptice.

a) 1 rad/s^2 b) 3 rad/s c) 6 rad/s d) 2 rad/s

11. Tijelo se kreće po kružnici konstantnom ugaonom brzinom od 4π rad/s. Odredi period oscilovanja tog tijela.

a) 0,6 s b) 1 s c) 4 s d) 0,5 s

12. Na tijelo mase 1 kg, djeluje stalna sila te ono pređe put od 20 m za 2s. Odredi intenzitet t sile.

a) 4.5 N b) 170 N c) 10 N d) 30 N

13. Koja od navedenih izjava o kinetičkoj energiji je tačna ?

a) Mjeri se u watima b) Uvijek je jednaka potencijalnoj energiji

c) Uvijek je negativna d) Direktno je proporcionalna kvadratu brzine

14. Odredi visinu na kojoj miruje helikopter mase 10 000 kg ako na toj visini posjeduje energiju od 10 MJ. ($g = 10\ m/s^2$)

a) 1000 m b) 550 m c) 100 m d) 500 m

15. Na tijelo mase 4 kg djeluje stalna sila od 8 N te pomjeri to tijelo za 6 m. Odredi izvršeni rad ove sile ?

a) 32 J b) 198 J c) 24 J d) 48 J

16. Naboj elektrona iznosi:
a) $-1{,}6\times10^{-19}$C b) $1{,}6\times10^{19}$C c) $6{,}625\times10^{-34}$C d) $8{,}31\times10^{23}$F

17. $F = k\frac{Q_1Q_2}{r^2}$ Ovo je: a) Njutnov zakon gravitacije b) Kulonov zakon
c) Faradejev zakon elektrolize d) Amperov zakon

18. Omov zakon za dio strujnog kola glasi:
a) I = R/U b) I = RU c) U = R/I d) I = U/R

19. Jedinica za električni otpor je: a) 1 V b) 1 F c) 1 C d) 1 Ω

20. m = kIt Ovo je:
a) Amperov zakon b) Brusterov zakon

c) Lorencov zakon d) Faradejev zakon elektrolize

21. F = BIl Ovo je izraz za:
a) Amperovu silu b) Kulonovu silu

c) Lorencovu silu d) Ajnštajnovu silu

22. Oko strujnog provodnika stvara se:
a) hemijsko polje b) magnetno polje

c) nuklearno polje d) gravitaciono polje

23. $E = \sigma T^4$ Ovo je a) Plankov zakon zračenja b) Vinov zakon
c) Štefan-Bolcmanov zakon d) Ajnštajnova relacija za energiju

24. Brzina svjetlosti u vakuumu iznosi:
a) 3 00 km/s b) 3 000 km/s c) 300 km/h d) 300 000 km/s

25. Apsolutni indeks prelamanja svjetlosti za staklo iznosi 1,5. Brzina svjetlosti u staklu je:
a) 150 000 km/s b) 1 500 m/s c) 200 000 km/s d) 150 000 km/h

26. Svjetlosna zraka ide paralelno glavnoj optičkoj osi. Na bikonveksnom sočivu zraka se prelama i prolazi kroz:

a) centar sočiva c) vrh sočiva b) tjeme sočiva d) žižu sočiva

27. Razlaganje sunčeve svjetlosti na boje zove se:
a) polarizacija b) interferencija c) disperzija d) difrakcija

28. Plankov zakon zračenja glasi: a) $E = hf$ b) $E = h\lambda$ c) $E = hf + E_k$ d) $E = mc^2$

29. U atomskom jezgru nalaze se:
a) samo neutroni b) protoni i neutroni c) protoni i elektroni d) samo elektroni

30. Redni broj atoma u periodnom sistemu elemenata određuje se na osnovu:
a) broja protona u jezgru b) broja protona i neutrona u atomskom jezgru
c) broja elektrona u jezgru d) broja protona u elektronskoj ljusci

31. Zakon radioaktivnog raspada dat je izrazom:
a) $N = N_0 e^{-\lambda t}$ b) $N = N_0 e^{\lambda t}$ c) $N_0 = \lambda N$ d) $\lambda = N_0 - N$

32. Nuklearna fisija je: a) cijepanje atomskih jezgara b) sinteza atomskih jezgara
c) hemijska reakcija d) zračenje apsolutno crnog tijela

33. Energija Sunčevog zračenje nástaje: a) nuklearnom fisijom
b) nuklearnom fuzijom c) hemijskim reakcijama d) fotoelektričnim efektom

34. Starost Sunca procjenjuje se na:

a) 5 000 godina b) 50 000 godina c) 5 000 000 godina d) 5 000 000 000 godina

PRVI KVALIFIKACIONI ISPIT IZ HEMIJE
za upis kandidata u prvu godinu dodiplomskog studija na RGGF-u
u školskoj 2009/2010 godini

1. Za hemijske elemente: **olovo, selen, skandijum** napišite hemijske simbole:____
____

2. **Kripton, Radon i Argon** su:

3. Niz hemijskih spojeva koje predstavljamo formulama **KCl, $FeCl_3$, $CaCl_2$, $AlCl_3$** zovu se opštim imenom ______________________________

4. Odrediti oksidacijsko stanje elementa **fosfora** u P_2O_5 ______________

5. Izračunati molarne mase:
   a) Fe_2O_3 ______________________________
   b) $FeCl_3$ ______________________________

Relativne atomske mase: Fe-55,85; O-16; Cl-35,5.

6. **Elektron** je ______________________________

7. **Izotopi** jednog elementa su: ______________________________

8. Pri **egzotermnim** procesima toplota se: ______________________________

9. Od navedenih rastvora **jaki elektrolit** je:
   a) rastvor natrijum hlorida
   b) rastvor šećera
   c) rastvor amonijaka
   d) rastvor uree

10. **Hidroliza** je proces između: ______________________________

11. **Magnezijum, kalcijum i natrijum su** ______________________________

12. Niz hemijskih spojeva koje predstavljamo formulama **FeS, CuS, Na_2S, Al_2S_3** zovu se opštim imenom: ______________________________

13. Odrediti oksidacijsko stanje elementa **nitrogena** u
    a) HNO_3 ________
    b) N_2O_3 ________
    c) $NaNO_2$ ________

14. **Proton** je ______________________________

15. **Atomski broj** je ______________________________

16. **Kisela** sredina je kod pH ______________________________

17. Koji od navedenih spojeva **nije** so: ______________________________

18. Neutralizacija je proces između ______________________________

19. Za hemijske elemente : **bor, hrom, mangan, galij, antimon, cezij,** ispravno napisan redoslijed simbola je :

a) Bo,Cr,Mg,Ga,Sb,Cz
b) B,Cr,Mn,Ga,Sb,Cs
c) B,Hr,Mn,Gl,An,Cs

20. Elementi I A grupe su: ______________________________

22. Nabrojani elementi Cu,Fe,Al i Ag spadaju u grupu: ______________________________

23. Odrediti oksidacijsko stanje elementa **sumpora** u $\mathbf{Al_2(SO_4)_3}$: ______________________________

24. Koliko elektrona ima ion $\mathbf{Se^{-2}}$ ako je redni broj za Se 34. ______________________________

25. Rastvaranjem u vodi neke hemijske tvari se razlažu na ione. Napisati reakciju disocijacije $\mathbf{Ca(OH)_2}$ ______________________________

26. Nabrojani spojevi $\mathbf{H_2O}$**, HCl i** $\mathbf{NH_3}$ su nastali hemijskom vezom: ______________________________

27. Ioni su: ______________________________

28. Jedinica za masenu koncentraciju rastvora je: ______________________________

29. Katalizatori su supstance koje ______________________________

30. Halogeni elementi su: ______________________________

31. Nabrojani elementi S,O,P, N spadaju u grupu: ______________________________

32. Odrediti oksidacijsko stanje elementa nitrogena **u** $\mathbf{Ca(NO_3)_2}$: ______________________________

33. Orbitala može da primi ____________ elektrona

34. Legure su: ______________________________

35. Ako je **pH-rastvora 7 rastvor je:** ______________________________

36. Nabrojani spojevi **NaCl,CaO i** $\mathbf{CaF_2}$ su nastali hemijskom vezom: ______________________________

37. Maseni broj predstavlja: ______________________________

38. Pri endotermnim procesim toplota se: ______________________________

39. Jedinica za količinsku koncentraciju rastvora je: ______________________________

40. Sadržaj **kisika** u atmosferskom zraku je ______________________________

PITANJA IZ INFORMATIKE

1. Prvi elektronski računar koristili su:
a) Mašinski jezik
b) Basic – jezik
c) Assembler

2. Za programiranje napravljeno je
a) 5-10 programskih jezika
b) Više od 100
c) Stalno se novi stvaraju

3. Postoji više podjela programskih prevodioca. Jedna od tih podjele je na (izbaci uljeza):
a) Kompajlere
b) Interpretere
c) Grafičke

4. Računari su danas prvenstveno koriste za (nabrojite po vašem mišljenju područja primjene)
a) ____________________
b) ____________________
c) ____________________
d) ____________________

5. Podaci u računaru se predstavljaju u
a) Dekadnom brojnom sistemu
b) Binarnom brojnom sistemu
c) SI sistemu

6. Brzina računara se izražava (izbaci uljeza):
a) n Hz – broj ciklusa u sekundi
b) m Ps – broj podataka u sekundi
c) k ms – brojem metara u sekundi

7. Jačina računara prvenstveno zavisi od:
a) RAM i ROM (memorijski čipovi)
b) Veličine u GB hard diska ili
c) Marke i vrste matrične ploče

8. Najmanji element podatka u računaru je:
a) Bit
b) Bajt
c) Word

9. Prva mašina za računanje je proizvedena :
a) Prije više od nekoliko hiljada/tisuća godina
b) U XVIII vijeku/stoljeću
c) U prvoj polovici XX vijeka/stoljeća

10. Prvi elektronski računar se zvao:
a) ENIAC
b) ABACUS
c) APOLO

11. Glavni sastavni dijelovi računara su:
a) Softver i hardwer
b) Monitor, tastatura i miš
c) Monitor, tastatura, miš i štampač

12. Jedan od nabrojanih dijelova ne može biti operativni sistem na vašem računaru (izbaci uljeza):
a) DOS
b) Windows
c) Linux
d) BASIC

13. Rad računara kontroliše
a) CPU (centralna procesorska jedinica)
b) Hard disk
c) Grafička kartica ili
d) Miš

14. Ako jedan kilogram ima 1000 grama, a milimetar 0.001 metara onda kilobajt ima
a) 1000 bajtova
b) 0.001 bajtova ili
c) 1024 bajta

15. Računari po načinu rada dijele se na (izbaci uljeza)
a) Analogne
b) Digitalne
c) Hibridne
d) Personalne

16. Za programiranje se danas koriste jezici (izbaci uljeza):
a) C/C++
b) FORTRAN
c) VISUAL BASIC
d) ACAD

17. Podaci u računar se unose:
a) Preko tastature
b) Preko miša
c) Preko štampača

18. Izbacite uljeza iz sljedeće liste:
a) PASCAL
b) BASIC
c) SQL
d) FORTRAN
e) C

19. Programski jezik koji se sastoji od nula i jedinica se naziva:
a) ASSEMBLER
b) JAVA
c) MAŠINSKI
d) C++

20. Koje od slijedećih riječi ne predsravljaju ispravne indentifikatore u programu:
a) u2
b) 2c
c) Ćevapi
d) Obim kruga

21. Zaokružite neispravne realne konstante u sljedećem popisu:
a) 274,23
b) 3e4
c) 123
d) 423.25

22. U informatici se koriste skraćenice od engleskih riječi za kompjuterski podržane operacije. U nabrojanim skraćenicama izbacite uljeza
a) CAD
b) CAM
c) CIA

23. Poredaj po redoslijedu osnovne korake u programiranju:
a) Izrada šeme toka
b) Testiranje
c) Pisanje dokumentacije
d) Izrada algoritma
e) Pisanje programa

24. Napravljen program je:
a) Gotov proizvod namijenjen korištenju
b) Nikad završen proizvod, ali je u upotrebi

25. Šta je GUI
a) Generisano Upravljanje Izlazom
b) Graphical User Interface
c) Glavni Ulaz Izlaz

26. Modem je komponenta koja služi za
a) Formiranje Ethernet mreža
b) Komunikaciju preko telefonskih linija
c) Trajnu pohranu podataka
d) Grafički prikaz podataka

27. Koja od tvrdnji nije tačna
a) Power Point omogućava izradu prezentacija sa efektima animacije
b) U power Point prezentacije je moguće dodavati muziku
c) Prezentacije izrađene u Power Pointu mogu se snimiti u više formata uključujući i HTML
d) Power Point se ne može koristiti za izradu prezentacija na folijama.

28. HTML je:
a) Jezik za pravljenje programa
b) Jezik za izradu web stranica
c) Program za izradu web stranica
d) Internet protokol

29. U Windows OS grupa ikona se može selektirati:
a) Pojedinačnim desnim klikom miša na svaku ikonu
b) Povlačenjem desnim ili lijevim dugmetom miša preko ikona
c) Pritiskom na tipku DEL na tastaturi i desnim klikom na svaku ikonu
d) Dvostrukim klikom na svaku ikonu

30. Višak je:
a) ROM
b) PROM
c) CD
d) RAM

MATEMATIKA

1 Polinomi. Rastavljanje na proste faktore

Definicija 1.1 *Funkcija oblika*

$$\begin{aligned} P(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \\ (a_i &\in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, 2, ..., n; \quad a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{C}) \end{aligned}$$

naziva se polinom n-tog stepena s jednom promjenljivom. Brojevi

$$a_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

nazivaju se koeficijenti polinoma, a izrazi $a_i x^i$ članovi polinoma.

Neke važne formule

a) Razlika kvadrata

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

b) Razlika kubova

$$x^3 - y^3 = (x - y)\left(x^2 + xy + y^2\right).$$

c) Zbir kubova

$$x^3 + y^3 = (x + y)\left(x^2 - xy + y^2\right).$$

d) Kvadrat zbira i razlike

$$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2.$$

e) Kub zbira i razlike

$$(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2 y + 3xy^2 \pm y^3.$$

Primjeri :

Rastaviti na faktore (1-9):

1. a) $x^2 + 3x + 2$; b) $x^2 + 6x + 8$; c) $x^2 + 12x + 35$

2. a) $x^2 - 3x - 4$; b) $x^2 - 7x - 30$; c) $2a^2 - 6a - 20$

3. a) $3x^2 - 27$; b) $5x^3y^4 - 45xy^2$; c) $36(a+1)^2 - 49a^2$

4. a) $(x - y - z)^2 - (x + y)^2$; b) $(a^2 - 2a + 1)^2 - (a^2 + 3a - 4)^2$

5. a) $25a^2 - 20a + 4$; b) $12x^2 - 36x + 27$; c) $a^4b - 4a^3b^2 + 4a^2b^3$

6. a) $1 - 8a^3$; b) $x^3y^3 + 27z^3$; c) $8(a+1)^3 + 27(a-3)^3$

Rješenja i rezultati:

U zadacima 1. i 2. srednji član treba predstaviti u obliku zbira ili razlike dva monoma čiji je proizvod koeficijenata jednak slobodnom koeficijentu datog trinoma.

1. a) $x^2+3x+2 = x^2+x+2x+2 = x\,(x+1)+2\,(x+1) = (x+1)\,(x+2)$

   b) $x^2+6x+8 = x^2+2x+4x+8 = x\,(x+2)+4\,(x+2) = (x+2)\,(x+4)$

   c) $x^2 + 12x + 35 = x^2 + 5x + 7x + 35 = x\,(x+5) + 7\,(x+5) = (x+5)\,(x+7)$

2. a) $x^2-3x-4 = x^2+x-4x-4 = x\,(x+1)-4\,(x+1) = (x+1)\,(x-4)$

   b) $x^2 - 7x - 30 = x^2 - 10x + 3x - 30 = x\,(x-10) + 3\,(x-10) = (x-10)\,(x+3)$

   c) $2a^2-6a-20 = 2\left(a^2 - 3a - 10\right) = 2\left(a^2 - 5a + 2a - 10\right) = 2\,(a-5)\,(a+2)$.

U zadacima 3. i 4. koristiti formulu razlike kvadrata:

3. a) $3x^2 - 27 = 3\left(x^2 - 9\right) = 3\,(x-3)\,(x+3)$

   b) $5x^3y^4 - 45xy^2 = 5xy^2\left(x^2y^2 - 9\right) = 5xy^2\,(xy-3)\,(xy+3)$

   c) $36\,(a+1)^2 - 49a^2 = [6\,(a+1)]^2 - (7a)^2$
   $= [6\,(a+1) - 7a]\,[6\,(a+1) + 7a] = (6-a)\,(13a+6)$.

4. a) $(x-y-z)^2-(x+y)^2$
$= [(x-y-z)-(x+y)]\,[(x-y-z)+(x+y)]$
$= (-2y-z)\,(2x-z) = -\,(2y+z)\,(2x-z)$

b) $\left(a^2-2a+1\right)^2-\left(a^2+3a-4\right)^2$
$= \left[\left(a^2-2a+1\right)-\left(a^2+3a-4\right)\right]\cdot\left[\left(a^2-2a+1\right)+\left(a^2+3a-4\right)\right]$
$= (-5a+5)\left(2a^2-2a+3a-3\right)$
$= -5\,(a-1)\,(a-1)\,(2a+3) = -5\,(a-1)^2\,(2a+3)\,.$

5. Koristiti formulu kvadrata razlike (zbira):

a) $(5a-2)^2$

b) $12x^2-36x+27 = 3\left(4x^2-12x+9\right) = 3\,(2x-3)^2$

c) $a^4b-4a^3b^2+4a^2b^3 = a^2b\left(a^2-4ab+4b^2\right) = a^2b\,(a-2b)^2.$

6. Koristiti formule zbira i razlike kubova:

a) $1-8a^3 = 1^3-(2a)^3 = (1-2a)\left(1+2a+4a^2\right)$

b) $x^3y^3+27z^3 = (xy)^3+(3z)^3 = (xy+3z)\left(x^2y^2-3xyz+9z^2\right)$

c) $8\,(a+1)^3+27\,(a-3)^3$
$= [2\,(a+1)+3\,(a-3)]\cdot\left[4\,(a+1)^2-6\,(a+1)\,(a-3)+9\,(a-3)^2\right]$
$= (5a-7)\left(7a^2-34a+103\right).$

2 Racionalne funkcije

Definicija 2.1 *Funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ oblika*

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \qquad (Q(x)\neq 0),$$

pri čemu su $P(x)$ i $Q(x)$ polinomi, zove se racionalna funkcija jedne promjenljive.

Operacije s racionalnim funkcijama

Sabiranje i oduzimanje:

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \pm \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{P_1(x)Q_2(x) \pm P_2(x)Q_1(x)}{Q_1(x)Q_2(x)}, \quad Q_1(x) \neq 0, \; Q_2(x) \neq 0.$$

Množenje:

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \cdot \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{P_1(x) \cdot P_2(x)}{Q_1(x) \cdot Q_2(x)}, \quad Q_1(x) \neq 0, \; Q_2(x) \neq 0.$$

Dijeljenje:

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} : \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \frac{P_1(x) \cdot Q_2(x)}{Q_1(x) \cdot P_2(x)}, \quad Q_1(x) \neq 0, \; Q_2(x) \neq 0, \; P_2(x) \neq 0.$$

Dvojni razlomak:

$$\frac{\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}}{\dfrac{P_2(x)}{Q_2(x)}} = \frac{P_1(x) \cdot Q_2(x)}{Q_1(x) \cdot P_2(x)}, \quad Q_1(x) \neq 0, \; Q_2(x) \neq 0, \; P_2(x) \neq 0.$$

Zadaci:

1. a) $\dfrac{2}{x^2-9} - \dfrac{4}{(x+3)^2} - \dfrac{1}{(3-x)^2}$

$$= \frac{2}{(x-3)(x+3)} - \frac{4}{(x+3)^2} - \frac{1}{(x-3)^2}$$

$$= \frac{2(x-3)(x+3) - 4(x-3)^2 - (x+3)^2}{(x-3)^2(x+3)^2}$$

$$= \frac{2\left(x^2-9\right) - 4\left(x^2-6x+9\right) - \left(x^2+6x+9\right)}{(x-3)^2(x+3)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 18 - 4x^2 + 24x - 36 - x^2 - 6x - 9}{(x-3)^2(x+3)^2}$$

$$= \frac{-3x^2 + 18x - 63}{(x-3)^2(x+3)^2} = \frac{-3\left(x^2-6x+21\right)}{\left(x^2-9\right)^2};$$

2. $\left(\frac{3a}{9-3x-3a+ax}-\frac{1}{a^2-9}:\frac{x-a}{3a^2+9a}\right)\cdot\frac{x^3-27}{3a}$

$$=\left(\frac{3a}{(a-3)(x-3)}-\frac{1}{(a-3)(a+3)}\cdot\frac{3a(a+3)}{x-a}\right)\cdot\frac{x^3-27}{3a}$$

$$=\frac{3a(x-a)-3a(x-3)}{(a-3)(x-3)(x-a)}\cdot\frac{x^3-27}{3a}$$

$$=\frac{3a(x-a-x+3)}{(a-3)(x-3)(x-a)}\cdot\frac{(x-3)\left(x^2+3x+9\right)}{3a}$$

$$=-\frac{x^2+3x+9}{x-a}=\frac{x^2+3x+9}{a-x}.$$

3 Linearne jednadžbe

Definicija 3.1 *Neka su $f(x)$ i $g(x)$ funkcije na skupu $\mathbb{R}$. Jednakost $f(x)=g(x)$ se naziva jednadžba s jednom nepoznanicom.*

Svaka vrijednost varijable $x=a$ za koju vrijedi $f(a)=g(a)$ zove se rješenje ili korijen jednadžbe.

Jednadžbu nazivamo linearnom ako je najviši stepen nepoznanice jednak jedinici.

Opći oblik linearne jednadžbe je $ax+b=0$.

Definicija 3.2 *Za dvije ili više jednadžbi kažemo da su ekvivalentne ako i samo ako imaju jednake skupove rješenja.*

Teorem 3.1 *Jednadžbe*

$$f(x)=g(x) \quad i \quad f(x)\pm h(x)=g(x)\pm h(x)$$

su ekvivalentne ako je izraz $h(x)$ definiran u definicionom području prve jednadžbe.

Teorem 3.2 *Jednadžbe*

$$f(x) = g(x) \quad i \quad f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x)$$

su ekvivalentne ako je izraz $h(x)$ definiran u definicionom području prve jednadžbe i ako je $h(x) \neq 0$.

Primjer :
Riješiti jednadžbu:

$$\frac{3}{x^2 - 4x} - \frac{9}{2x^2 + 3x} = \frac{2}{2x^2 - 5x - 12}.$$

Rješenje. $DP : \begin{cases} x^2 - 4x = x(x-4) \neq 0 \Rightarrow (x \neq 0 \wedge x \neq 4), \\ 2x^2 + 3x = x(2x+3) \neq 0 \Rightarrow \left(x \neq 0 \wedge x \neq -\dfrac{3}{2}\right), \\ 2x^2 - 5x - 12 \neq 0 \Rightarrow \left(x \neq -\dfrac{3}{2} \wedge x \neq 4\right), \end{cases}$

jer je

1. $2x^2 + 3x - 8x - 12 = x(2x+3) - 4(2x+3) = (2x+3)(x-4)$.

   Dakle, $DP : x \neq -\frac{3}{2} \wedge x \neq 0 \wedge x \neq 4.$

   Uz ovaj uvjet data jednadžba je ekvivalentna jednadžbi

   $$\frac{3}{x(x-4)} - \frac{9}{x(2x+3)} = \frac{2}{(2x+3)(x-4)}$$

   $$\Leftrightarrow 3(2x+3) - 9(x-4) = 2x \Leftrightarrow x = 9.$$

Kako $x = 9$ pripada definicionom području jednadžbe, to je ono i rješenje jednadžbe.

4 Sistemi linearnih jednadžbi

Definicija 4.1 *Za skup jednadžbi kažemo da čine sistem ako nas interesuju zajednička rješenja svih jednadžbi toga skupa.*

Opšti oblik sistema od dvije linearne jednadžbe sa dvije nepoznanice izgleda ovako:

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}\right\}, \qquad (a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}). \tag{1}$$

Rješenje sistema (1) jest svaki par brojeva (x_0, y_0) koji zadovoljava i jednu i drugu jednadžbu sistema.

Dva sistema linearnih jednadžbi jesu ekvivalentni ako su im skupovi rješenja jednaki.

Teorem 4.1

Metodi rješavanja:

a) **Gausov metod** sastoji se u tome da se sistem (1) ekvivalentnim transformacijama dovede na oblik trougaone šeme:

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ dy &= e \end{aligned}\right\}, \qquad (d, e \in \mathbb{R}). \tag{2}$$

Zatim iz druge jednadžbe sistema (2) odredimo vrijednost nepoznanice y i njenu vrijednost uvrstimo u prvu jednadžbu. Odatle dobijamo i vrijednost nepoznanice x.

b) **Metod zamjene** (supstitucije) sastoji se u tome da iz jedne jednadžbe sistema (1) izrazimo jednu nepoznanicu, npr. nepoznanicu x iz prve jednadžbe:

$$x = \frac{c_1 - b_1y}{a_1}, \qquad a_1 \neq 0, \tag{3}$$

i dobijeni rezultat uvrstimo u drugu jednadžbu sistema, te je riješimo po drugoj nepoznanici,

$$y = \frac{a_1c_2 - c_1a_2}{a_1b_2 - b_1a_2} \qquad (a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0).$$

Uvrštavanjem ove vrijednosti u (3) dobijamo i vrijednost druge nepoznanice:

$$x = \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2}.$$

c) **Metod determinanti :** Sistem (1) ekvivalentan je sistemu

$$x \cdot D = D_x, \quad y \cdot D = D_y, \tag{4}$$

gdje su D, D_x, D_y determinanta sistema i determinante po nepoznanicama x i y :

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \qquad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Primjeri:

1. Riješiti sistem jednadžbi

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = \frac{5}{2}.$$

Rješenje. Uvedimo nove promjenljive: $u = \dfrac{1}{x}$, $v = \dfrac{1}{y}$. Dati sistem sada poprima oblik

$$\begin{cases} u + 2v = \dfrac{3}{2} \\ 2u + 3v = \dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u + 4v = 3 \\ 4u + 6v = 5 \end{cases}.$$

Sada imamo

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 16 = -4,$$

1. $D_u = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 20 = -2, \quad D_v = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2.$

   Otuda je:

   $u = \dfrac{D_u}{D} = \dfrac{-2}{-4} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 2;$

   $v = \dfrac{D_v}{D} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = 2$

   $R : (x, y) = (2, 2)$

2. Ako se u jednom pravougaoniku kraća stranica poveća za $8cm$, a duža smanji za 4 cm, dijagonala ne mijenja svoju dužinu, ali se površina poveća za 240 cm^2. Naći dužine stranica pravougaonika?

Rješenje. $x-$kraća stranica, $y-$duža stranica pravougaonika. Dijagonala d ima dužinu $d = x^2 + y^2$. Dakle,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = (x+8)^2 + (y-4)^2 \\ (x+8)(y-4) = xy + 240, \end{cases}$$

odakle je $x = 16,\ y = 42$.

5 Linearne nejednadžbe

Opći oblik linearne nejednadžbe je:

$$ax > b, \quad (a, b \in \mathbb{R}). \tag{5}$$

Rješenje linearne nejednadžbe (5) je skup svih brojeva iz $\mathbb{R}$, za koje nejednadžba prelazi u tačnu nejednakost.

Dvije linearne nejednadžbe s jednom nepoznatom su ekvivalentne ako su im skupovi rješenja jednaki.

Primjeri:

1. a) Riješiti nejednadžbu: $\dfrac{3x+1}{x-3} \leq -2$.

Rješenje. Data nejednadžba je ekvivalentna sa $\dfrac{3x+1}{x-3} + 2 \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{5x-5}{x-3} \leq 0$.

Odgovarajuća tablica ima oblik:

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$A = 5x-5$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$B = x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
A/B	$+$	0	$-$	ND	$+$

$\dfrac{5x-5}{x-3} \leq 0$, za $\ x \in [1,3)$.

6 Kvadratne jednadžbe i nejednadžbe

Funkcija $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ oblika

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \tag{6}$$

gdje su a, b i $c, a \neq 0$ realni parametri, a x realna varijabla, je **kvadratna funkcija**. Formula (6) je opšti oblik kvadratne funkcije.

Nule kvadratne funkcije su isto što i rješenja pripadne kvadratne jednadžbe

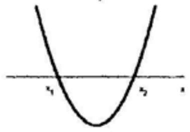
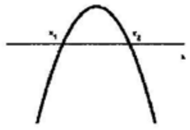
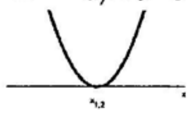
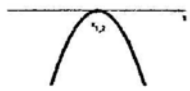
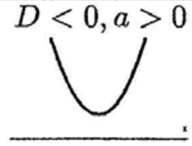
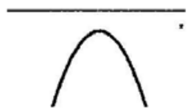
$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{7}$$

Izraz oblika

$$D = b^2 - 4ac \tag{8}$$

se naziva **diskriminanta** kvadratne funkcije (jednadžbe).

U sljedećoj tabeli prikazana je ovisnost nula od znaka diskriminante, kao i ovisnost grafika (parabole) i znaka funkcije od znaka diskriminante i koeficijenta a.

Znak D i a, grafik	$f(x)=0$	Znak funkcije $f(x)$
$D>0, a>0$   $D>0, a<0$	$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$	$f(x)>0$, $x\in\langle-\infty,x_1\rangle\cup\langle x_2,+\infty\rangle$ $f(x)<0, x\in\langle x_1,x_2\rangle$ --- $f(x)<0$, $x\in\langle-\infty,x_1\rangle\cup\langle x_2,+\infty\rangle$ $f(x)>0, x\in\langle x_1,x_2\rangle$
$D=0, a>0$   $D=0, a<0$	$x_{1,2}=-\frac{b}{2a}$	$f(x)>0, x\neq-\frac{b}{2a}$ --- $f(x)<0, x\neq-\frac{b}{2a}$
$D<0, a>0$   $D<0, a<0$	$x_{1,2}\notin\mathbb{R}$	$f(x)>0, x\in\mathbb{R}$ --- $f(x)<0, x\in\mathbb{R}$

Primjeri:

1. Odrediti vrijednosti parametra m za koje je nejednadžba
$$3x^2-2mx+12>0$$
zadovoljena za svaku realnu vrijednost x.

Rješenje. Kako je $a = 3 > 0$, da bi data nejednadžba bila zadovoljena za svaku realnu vrjednost x mora da bude $D < 0$, odnosno

$4m^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12 = 4\left(m^2 - 36\right) < 0$, tj. $m \in \langle -6, 6 \rangle$.

2. Riješiti nejednadžbu: $(x^2 - 4x - 5)(x^2 + 2x - 3) < 0$.

Rješenje. Odredimo prvo nule pojedinih faktora:

$$A = x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow (x = -1 \vee x = 5);$$

$$B = x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x = -3 \vee x = 1).$$

Odgovarajuća tablica izgleda ovako:

x	$-\infty$	-3		-1		1		5	$+\infty$
A	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
B	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
AB	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

R: $x \in \langle -3, -1 \rangle \cup \langle 1.5 \rangle$.

7 Eksponencijalne jednadžbe i nejednadžbe

Datu eksponencijalnu jednadžbu je najćešće moguće svesti na oblik :

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \quad (0 < a \neq 1).$$

Ova jednadžba je ekvivalentna jednažbi:

$$f(x) = g(x).$$

Data eksponencijalna nejednadžba najčešće se može svesti na oblik:

$$a^{f(x)} < a^{g(x)}.$$

a) Ako je $a > 1$, onda je ta nejednadžba ekvivalentna nejednadžbi

$$f(x) < g(x).$$

b) Ako je $0 < a < 1$, onda je ta nejednadžba ekvivalentna nejednadžbi

$$f(x) > g(x).$$

Z a d a c i :.

1. Riješiti sljedeće jednadžbe :

2. $2^{x-1} = 4^5 \Leftrightarrow 2^{x-1} = 2^{10} \Leftrightarrow x - 1 = 10 \Leftrightarrow x = 11$

3. $\sqrt[x]{16} = \sqrt{4^x} \Leftrightarrow 16^{\frac{1}{x}} = 4^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow 4^{\frac{2}{x}} = 4^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow \dfrac{2}{x} = \dfrac{x}{2}$
   $\Leftrightarrow 4 = x^2 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 2$

4. $4^x - 4^{x-2} = 240 \Leftrightarrow 4^x - 4^x \cdot 4^{-2} = 240 \Leftrightarrow 4^x - \dfrac{4^x}{16} = 240$
   $\Leftrightarrow 4^x \left(1 - \dfrac{1}{16}\right) = 240 \Leftrightarrow 4^x \cdot \dfrac{15}{16} = 240 \Leftrightarrow 4^x = 16^2$
   $\Leftrightarrow 4^x = 4^4 \Leftrightarrow x = 4.$

5. $\sqrt{32^{4x-6}} = 0,25 \cdot 128^{2x-3} \Leftrightarrow 32^{\frac{4x-6}{2}} = \frac{1}{4} \cdot 2^{7(2x-3)}$
   $\Leftrightarrow 2^{5(2x-3)} = 2^{-2+7(2x-3)} \Leftrightarrow x = 2$

Riješiti sljedeće nejednadžbe:

1. $2^{2x^2} + 25^{\frac{x^2-1}{2}} > 5^{x^2} \Leftrightarrow 2^{2x^2} + 5^{x^2-1} > 5^{x^2}$
   $\Leftrightarrow 2^{2x^2} > 5^{x^2}\left(1 - \dfrac{1}{5}\right) \Leftrightarrow \left(\dfrac{4}{5}\right)^{x^2} > \dfrac{4}{5} \Leftrightarrow x^2 < 1$
   (jer je baza $\dfrac{4}{5} < 1$);
   Rezultat: $x \in \langle -1, 1 \rangle$.

8 Logaritamske jednadžbe

Logaritamska jednadžba

$$log_a f(x) = log_a g(x) \tag{9}$$

ekvivalentna je sistemu

$$f(x) > 0 \wedge g(x) > 0 \wedge f(x) = g(x). \tag{10}$$

Zajednička rješenja prve dvije nejednadžbe sistema određuju domenu jednadžbe (9), a jednadžba $f(x) = g(x)$ slijedi iz formule (10).

Ako umjesto jednadžbe (9) imamo jednadžbu

$$log_a f(x) = k, \tag{11}$$

možemo je svesti na oblik (9) stavljajući $log_a a^k$ umjesto k, ili koristeći definiciju logaritma (v. formulu (??)), možemo je odmah svesti na ekvivalentnu jednadžbu

$$f(x) = a^k.$$

Ukoliko svi logaritmi u datoj jednadžbi nemaju istu bazu, prvo ih treba svesti na istu bazu, koristeći neku od formula (??).

Z a d a c i :

Riješiti slijedeće jednadžbe:

1. $logx + log(x+3) = 1$
2. $log(x+2) + log(x-1) = 1$
3. $log\sqrt{5x-4} + log\sqrt{x+1} = 2 + log0,18$

Rješenje.

1. $DP : (x > 0 \wedge x + 3 > 0) \Leftrightarrow (x > 0 \wedge x > -3)$, tj.

$$DP : x > 0. \tag{12}$$

Uz uvjet (12) vrijede sljedeće ekvivalencije

$\log x + \log(x+3) = 1 \Leftrightarrow \log x(x+3) = \log 10$

$\Leftrightarrow x(x+3) = 10$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$

$\Leftrightarrow (x = -5 \vee x = 2)$

Prema (12), u obzir dolazi samo jedno rješenje, $x = 2$.

2. $DP : (x + 2 > 0 \wedge x - 1 > 0)$, tj.

$$DP : x > 1. \tag{13}$$

Data jednadžba je ekvivalentna jednadžbi : $x^2 + x - 12 = 0$, odakle je $x_1 = -4 \quad i \quad x_2 = 3$. Zbog (13), u obzir dolazi samo jedno rješenje, $x = 3$.

3. $DP : (5x - 4 > 0 \wedge x + 1 > 0) \Leftrightarrow (x > \frac{4}{5} \wedge x > -1)$, tj.

$$DP : x > \frac{4}{5}. \tag{14}$$

Uz uvjet (14) vrijedi

$\log\sqrt{5x-4} + \log\sqrt{x+1} = 2 + \log 0,18$

$\Leftrightarrow \log\sqrt{(5x-4)(x+1)} = \log 100 \cdot 0,18$

$\Leftrightarrow \sqrt{(5x-4)(x+1)} = 18 \Leftrightarrow 5x^2 + x - 4 = 324$

$\Leftrightarrow 5x^2 + x - 328 = 0$

$\Leftrightarrow (x = -\frac{41}{5} \vee x = 8)$.

Pa, prema (14) je $x = 8$.

9 Logaritamske nejednadžbe

Nejednadžbu oblika

$$log_a f(x) < log_a g(x) \tag{15}$$

ili oblika

$$log_a f(x) < k, \tag{16}$$

nazivamo ***logaritamskom nejednadžbom.***

Na osnovu formula (??) i (16)(11 .5) vrijedi slijedeće:

- ako je $a > 1$, nejednadžba (15) je ekvivalentna sistemu

$$f(x) > 0 \wedge g(x) > 0 \wedge f(x) < g(x),$$

- ako je $0 < a < 1$, ona je ekvivalentna sistemu

$$f(x) > 0 \wedge g(x) > 0 \wedge f(x) > g(x).$$

Nejednadžba (16) se, uz uvjet $f(x) > 0$, svodi na nejednadžbu

$$f(x) < a^k \quad \text{za} \quad a > 1,$$

odnosno na nejednadžbu

$$f(x) > a^k \quad \text{za} \quad 0 < a < 1.$$

Z a d a c i :

Riješiti slijedeće nejednadžbe:

1. $\log(x-4) - \log(x+1) \leq 1$
2. $\log_{0,1}\left(x^2+1\right) < \log_{0,1}(2x+9)$

Rješenje.

1. $DP: (x-4 > 0 \wedge x+1 > 0) \Leftrightarrow (x > 4 \wedge x > -1)$, tj.

$$DP: \ x > 4. \tag{17}$$

$$\log(x-4) - \log(x+1) \leq 1 \Leftrightarrow \log\frac{x-4}{x+1} \leq \log 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-4}{x+1} \leq 10 \overset{(17)}{\Leftrightarrow} x-4 \leq 10(x+1) \Leftrightarrow 9x+14 \geq 0$$

$$x \geq -\frac{14}{9} \tag{18}$$

$R:$ (17) $\cap$ (18) $\Rightarrow x > 4$.

2. Imamo da je

$$DP: x > -\frac{9}{2}. \tag{19}$$

$\log_{0,1}(x^2+1) < \log_{0,1}(2x+9)$, zbog toga što je baza logaritma $0,1 < 1$, imamo

$\Leftrightarrow x^2 + 1 > 2x + 9 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 > 0,$

$$x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 4, +\infty\rangle \tag{20}$$

$$R: \ (19) \cap (20) \Rightarrow x \in \left\langle -\frac{9}{2}, -2\right\rangle \cup \langle 4, +\infty\rangle.$$

10 Trigonometrija

1. **Osnovni trigonometrijski identiteti**

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}, \quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \quad \cos ec\alpha = \frac{1}{\sin\alpha},$$

2. **Svođenje trigonometrijskih funkcija ma kojeg ugla na trigonometrijske fukcije oštrog ugla (kuta):**

a) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$,

$$tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = ctg\alpha, \quad ctg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = tg\alpha.$$

b) $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$,

$$tg(\pi - \alpha) = -tg\alpha, \quad ctg(\pi - \alpha) = -ctg\alpha.$$

c) $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$,

$$tg(\pi + \alpha) = -tg\alpha, \quad ctg(\pi + \alpha) = -ctg\alpha.$$

d) $\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$,

$$tg(2\pi - \alpha) = -tg\alpha, \quad ctg(2\pi - \alpha) = -ctg\alpha.$$

e) $\sin(k\cdot 2\pi+\alpha)=\sin\alpha$, $\cos(k\cdot 2\pi+\alpha)=\cos\alpha$,

$$tg(k\cdot\pi+\alpha)=tg\alpha,\quad ctg(k\cdot\pi+\alpha)=ctg\alpha,\quad k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

f) $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$, $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$,

$$tg(-\alpha)=-tg\alpha,\quad ctg(-\alpha)=-ctg\alpha.$$

3. **Adicione formule**

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\sin\beta\cdot\cos\alpha,$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\beta\cdot\sin\alpha,$$

$$tg(\alpha\pm\beta)=\frac{tg\alpha\pm tg\beta}{1\mp tg\alpha\cdot tg\beta},\quad ctg(\alpha\pm\beta)=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta\mp 1}{ctg\alpha\pm ctg\beta}.$$

11 Trigonometrijske jednadžbe

Definicija 11.1 *Jednadžba kod koje se nepoznanica javlja kao argument trigonometrijske funkcije naziva se trigonometrijskom jednadžbom.*

Riješiti trigonometrijsku jednadžbu znači odrediti sve vrijednosti nepoznanice za koje je data jednadžba zadovoljena. Trigonometrijskih jednadžbi ima raznih vrsta i ne postoji univerzalni metod za rješavanje svih trigonometrijskih jednadžbi. Kod većeg broja trigonometrijskih jednadžbi nastojimo jednadžbu dovesti na oblik u kome će sve funkcije biti istog ugla i iste vrste.

Uglavnom se sve trigonometrijske jednadžbe svode na jednostavne trigonometrijske jednadžbe:

$$\sin x=\sin\alpha,\quad \cos x=\cos\alpha,$$

$$tgx=tg\alpha,\quad ctgx=ctg\alpha.$$

čija su rješenja redom skupovi:

$$x=k\pi+(-1)^k\alpha,\quad x=2k\pi\pm\alpha,$$

$$x=k\pi+\alpha,\quad y=k\pi+\alpha,\quad (k=0,\pm1,\pm2,\ldots).$$

Primjer:

1. Riješiti jednadžbu:

$$2\sin^3 x + \sin^2 x - \sin x = 0.$$

Rješenje. $\sin x \left(2\sin^2 x + \sin x - 1\right) = 0$, odnosno

$$\sin x = 0 \vee 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0. \tag{21}$$

Smjena:

$$\sin x = t \Rightarrow 2t^2 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(t = -1 \vee t = \frac{1}{2}\right)$$

$$1. \Leftrightarrow \left(\sin x = -1 \vee \sin x = \frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \end{array} \right.$$

Imajući na umu (21), imamo skupove rješenja date jednadžbe

$$\left\{ \begin{array}{c} x = k\pi \vee x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \end{array} \right.$$